ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1.		
3	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

2.		
9	2 pont	*A 2^9 válasz is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	

3.		
$A \cap B = \{12; 18; 24; 30; 36\}$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

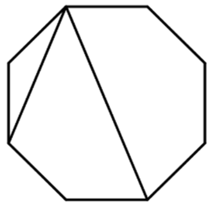
4.		
(Mivel egy négyszög belső szögeinek összege 360°, a legkisebb szöget α-val jelölve:) $\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360°$.	2 pont	
Ebből $\alpha = 36°$.	1 pont	
A legnagyobb szög: $(4 \cdot 36° =)$ 144°.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5.		
B és C	2 pont	*1 jó válasz, vagy 2 jó és 1 rossz válasz esetén 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Terjedelem: 600 Ft	1 pont	
Módusz: 1000 Ft	1 pont	
Medián: 1200 Ft	1 pont	
Átlag: 1300 Ft	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

7.		
$(150\,000 \cdot 0{,}94 =)$ 141 000 Ft	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

8.		
Például (1; 2).	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
8	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

10.		
$x_1 = 5$	1 pont	
$x_2 = 3$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

12. első megoldás		
Összesen $(9 \cdot 10 \cdot 10 =)$ 900 darab háromjegyű pozitív egész szám van (összes eset száma).	1 pont	
Ezek közül $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ olyan, amelynek a számjegyei különbözők (kedvező esetek száma).	2 pont	
A keresett valószínűség: $\frac{648}{900}$ $(= 0,72)$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

12. második megoldás		
Annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott szám második számjegye különbözik az elsőtől: $\frac{9}{10}$.	1 pont	
Annak valószínűsége, hogy a harmadik számjegye különbözik az első kettőtől: $\frac{8}{10}$.	1 pont	
A keresett valószínűség ezek szorzata: $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0,72$.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

II. A

13. a)

A zárójelek felbontása után: $x^2+8x+16+x^2+3x+2=9$.	2 pont	
$2x^2+11x+9=0$	1 pont	
$x_1=-1$, $x_2=-4{,}5$	2 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

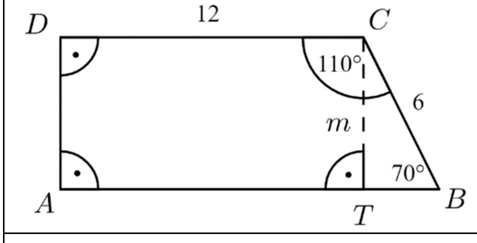
13. b) első megoldás

Az első egyenletből: $y = 7 - 2x$.	1 pont	
A második egyenletbe behelyettesítve: $3x - 7\cdot(7 - 2x) = 36$.	1 pont	
$17x - 49 = 36$	1 pont	
$x = 5$	1 pont	
$y = -3$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

13. b) második megoldás

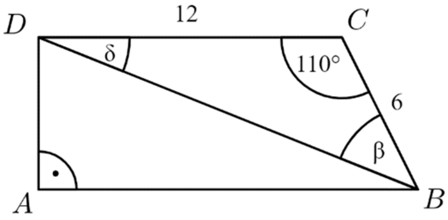
Az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel szorozva: $\left.\begin{aligned} 6x+3y&=21 \\ 6x-14y&=72 \end{aligned}\right\}$.	2 pont	*Az első egyenletet* 7*-tel szorozva*: $14x + 7y = 49$.
Az elsőből a másodikat kivonva: $17y = -51$.	1 pont	*Ehhez a második egyenletet hozzáadva*: $17x = 85$.
$y = -3$	1 pont	$x = 5$
Valamelyik eredeti egyenletbe behelyettesítve: $x = 5$.	1 pont	$y = -3$
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. a)

$ABC\sphericalangle = 70°$	1 pont	
 A BCT háromszögben: $\sin 70° = \dfrac{m}{6}$	1 pont	
$AD = CT = m \approx 5{,}64$ (cm)	1 pont	

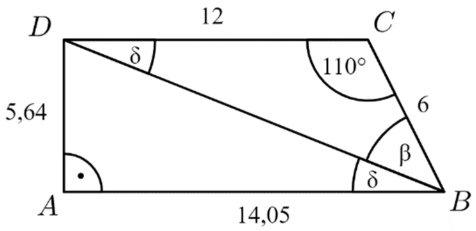
Pitagorasz-tétellel: $TB^2 + m^2 = 36$,	1 pont	$\cos 70° = \frac{TB}{6}$
amiből $TB \approx 2{,}05$ (cm).	1 pont	
$AB \approx 12 + 2{,}05 = 14{,}05$ (cm)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

14. b) első megoldás



A BCD háromszögben a koszinusztételt felírva: $BD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 110°$.	1 pont	
$BD \approx 15{,}14$ cm	1 pont	
A BCD háromszögben a szinusztételt felírva: $\frac{6}{15{,}14} = \frac{\sin\delta}{\sin 110°}$.	1 pont	$\frac{12}{15{,}14} = \frac{\sin\beta}{\sin 110°}$
$\sin\delta \approx 0{,}3724$	1 pont	$\sin\beta \approx 0{,}7448$
(Mivel $\delta < 90°$, így) $\delta \approx 21{,}9°$	1 pont	$\beta \approx 48{,}1°$
$\beta = 180° - 110° - 21{,}9° = 48{,}1°$	1 pont	$\delta = 21{,}9°$
Összesen:	**6 pont**	

14. b) második megoldás



(Az a) részfeladatban kapott eredményekből, az ABD háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva:) $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{5{,}64^2 + 14{,}05^2} \approx 15{,}14$ cm.	2 pont	
$ABD\sphericalangle = BDC\sphericalangle$, mert váltószögek.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az ABD háromszögben: $\operatorname{tg}\delta = \frac{5{,}64}{14{,}05}$.	1 pont	
$\delta \approx 21{,}9°$	1 pont	
$\beta = 180° - 110° - 21{,}9° = 48{,}1°$	1 pont	$\beta = 70° - \delta$
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó valamelyik válaszát mértékegység nélkül adja meg, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.

15. a)		
$70 = 37 \cdot \lg K + 31$	1 pont	
$\frac{39}{37} = \lg K$	1 pont	
$K = 10^{\frac{39}{37}} \approx 11{,}325$	2 pont	
0,325 év megfelel $0{,}325 \cdot 12 = 3{,}9$ hónapnak,	1 pont	
tehát kerekítve 11 éves és 4 hónapos az a kutya, amely emberévekben mérve 70 éves.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít, vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**6 pont**	

15. b)		
A 8 éves kutya a második számítási módszer szerint $5{,}5 \cdot 8 + 12 = 56$ éves emberévekben mérve,	2 pont	
az amerikai képlet szerint pedig $37 \cdot \lg 8 + 31 \approx 64{,}4$ éves.	2 pont	
Ez az érték az 56-nak $\left(\frac{64{,}4}{56} =\right)$ 1,15-szorosa,	1 pont	
tehát 15%-kal nagyobb.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

II. B

16. a)		
Egy betűhármas megadása az {*ABE*, *ACD*, *ACE*, *AEF*, *BGH*, *DGH*} halmazból.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	

16. b) **első megoldás**		
A fokszámok összege 30,	1 pont	*Ezek a pontok akkor is járnak, ha a vizsgázó az ábra alapján helyesen megadja az élek számát.*
az eddig lejátszott mérkőzések száma ennek fele, azaz 15.	1 pont	
Az 5 forduló alatt megrendezendő mérkőzések száma $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.	1 pont	
Tehát (20 – 15 =) 5 mérkőzés maradt el.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. b) **második megoldás**		
Ha eddig minden mérkőzést lejátszottak volna, akkor minden fokszám 5 lenne.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az ehhez „hiányzó” fokszámok rendre: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1.	1 pont	
Az elmaradt mérkőzések száma a hiányzó fokszámok összegének (10) a fele,	1 pont	
tehát 5 mérkőzés maradt el.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. c)		
Annak a valószínűsége, hogy a játékos egy büntetőlövésből nem szerez gólt: (1 – 0,3 =) 0,7.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A kérdezett valószínűség binomiális eloszlással számolva (4-szer szerez gólt és 6-szor nem): $\binom{10}{4} \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^6 \approx$	2 pont	
≈ 0,200.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

16. d) **első megoldás**		
1 m^3 = 1 000 000 cm^3	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó méterben helyesen számol, és méterben adja meg a választ.*
A szabványos korong sugara: $r = 3{,}81$ (cm).	1 pont	
A szabványos korong térfogata: $V = 3{,}81^2 \cdot \pi \cdot 2{,}54 \approx 115{,}8$ (cm^3).	1 pont	*Ha a hasonlóság aránya k, akkor a nagyméretű korong térfogata:* $V = (3{,}81 \cdot k)^2 \cdot \pi \cdot (2{,}54 \cdot k)$
A k-szorosra nagyított korong térfogata az eredetinek k^3-szorosa: $1\,000\,000 = 115{,}8 \cdot k^3$.	1 pont	
Ebből $k \approx \sqrt[3]{8636} \approx 20{,}5$.	1 pont	
A nagyméretű korong magassága: $(20{,}5 \cdot 2{,}54 \approx)$ 52 cm,	1 pont	
alapkörének átmérője pedig: $(20{,}5 \cdot 7{,}62 \approx)$ 156 cm.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

16. d) **második megoldás**		
A feladat szövege alapján (a szabványos és a nagyméretű korong esetében is) az alapkör r sugarára, d átmérőjére és a korong m magasságára egyaránt $2r = d = 3m$ teljesül.	1 pont	
Azaz (mindkét korong esetében) $m = \frac{2}{3}r$.	1 pont	
Ha a nagyméretű korong sugarát (méterben mérve) R jelöli, akkor a feladat szövege alapján: $R^2\pi \cdot \frac{2}{3}R = 1$.	1 pont	
Ebből $R \approx \sqrt[3]{0{,}4775} \approx 0{,}78$ (m).	2 pont	
A nagyméretű korong alapkörének átmérője: $(2 \cdot 0{,}78 =)$ 1,56 m,	1 pont	
magassága pedig: $\left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}78 =\right)$ 0,52 m.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

17. a) **első megoldás**		
A feladat szövege alapján megoldandó a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{array}{r} m+b=200 \\ 21m+b=5200 \end{array}\right\}$.	2 pont	
A második egyenletből az elsőt kivonva: $20m = 5000$.	1 pont	
Az egyenletrendszer megoldása: $m = 250$	1 pont	
és $b = -50$. (Tehát a hozzárendelési szabály: $x \mapsto 250x - 50$.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. a) **második megoldás**		
A kérdéses lineáris függvény grafikonjának meredekségére: $m = \dfrac{5200-200}{21-1} =$	2 pont	
$= 250$.	1 pont	
$200 = 250 + b$	1 pont	$5200 = 21 \cdot 250 + b$
Ebből $b = -50$. (Tehát a hozzárendelési szabály: $x \mapsto 250x - 50$.)	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

17. b)		
Számtani sorozat esetén ($a_1 = 200$, $a_{21} = 5200$): $S_{21} = \dfrac{(200+5200)\cdot 21}{2} =$	2 pont	
$= 56\,700$ métert úszna Anna a teljes felkészülés alatt.	1 pont	
Mértani sorozat esetén ($b_1 = 200$, $b_{21} = 5200$): $5200 = 200 \cdot q^{20}$.	1 pont	
$q^{20} = 26$	1 pont	
$q \approx 1{,}177$	1 pont	
$S_{21} = 200 \cdot \dfrac{1{,}177^{21}-1}{1{,}177-1} \approx$	1 pont	
$\approx 33\,500$ métert úszna Anna.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

17. c) **első megoldás**		
A résztvevők száma legyen n, ekkor a nők száma $0{,}36n$, a férfiak száma $0{,}64n$.	1 pont	
Az életkorok összege $0{,}36n \cdot 35 + 0{,}64n \cdot 38 = 36{,}92n$,	2 pont	
átlaga pedig $\left(\dfrac{36{,}92n}{n} =\right) 36{,}92$ év.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. c) **második megoldás**		
A résztvevők 0,36 része nő, 0,64 része férfi.	1 pont	
Súlyozott átlaggal számolva: $0{,}36 \cdot 35 + 0{,}64 \cdot 38 \approx$	2 pont	
≈ 37 év az összes induló átlagéletkora.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. a)		
$5 \cdot 2 = 10$ olyan egyenes van, amely illeszkedik az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok valamelyikére, illetve az *F*, *G* pontok valamelyikére.	2 pont	
Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontokra, valamint az *F* és *G* pontokra is illeszkedik 1-1 egyenes, összesen tehát 12 megfelelő egyenes van.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

18. b) **első megoldás**		
A három kiválasztott pont akkor alkot háromszöget, ha nem esnek egy egyenesre. (Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok közül vagy 2-t választunk, vagy 1-et.)	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok közül 2-t $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk ki,	1 pont	
és ezekhez a harmadik csúcsot 2-féleképpen (*F* és *G* közül) választhatjuk ki. Ebben az esetben tehát 20 különböző háromszög van.	1 pont	
Az *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pontok közül 1-et 5-féleképpen választhatunk ki, és ezt kötjük össze *F*-fel és *G*-vel. Ebben az esetben tehát 5 különböző háromszög van.	1 pont	
Így összesen $20 + 5 = 25$ háromszög létezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b) **második megoldás**		
(Komplementer összeszámolást alkalmazunk.) A 7 pont közül 3-at $\binom{7}{3} = 35$-féleképpen választhatunk ki,	2 pont	
de ezek közül az egy egyenesre illeszkedő $\binom{5}{3} = 10$ darab ponthármas nem alkot háromszöget.	2 pont	
Így összesen $35 - 10 = 25$ háromszög létezik.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Teljes pontszámot kapjon a vizsgázó, ha rendezetten felsorolja a lehetséges háromszögeket, és ez alapján helyesen válaszol.

18. c) első megoldás		
$\left\|\overrightarrow{LK}\right\| = (\sqrt{(-2)^2+4^2} =)\sqrt{20}$	1 pont	
$\left\|\overrightarrow{LM}\right\| = (\sqrt{4^2+2^2} =)\sqrt{20}$	1 pont	
$\left\|\overrightarrow{KM}\right\| = (\sqrt{6^2+(-2)^2} =)\sqrt{40}$	1 pont	
$\sqrt{20}^2 + \sqrt{20}^2 = \sqrt{40}^2$, tehát (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) az L-nél valóban derékszög van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c) második megoldás		
$\overrightarrow{LK} = (-2;\ 4)$	1 pont	
$\overrightarrow{LM} = (4;\ 2)$	1 pont	
Az $\overrightarrow{LK}$ vektor az $\overrightarrow{LM}$ vektor 90°-os elforgatottja,	1 pont	*Skaláris szorzatuk:* $-2\cdot 4 + 4\cdot 2 = 0$.
tehát L-nél valóban derékszög van.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. c) harmadik megoldás		
A KL egyenes meredeksége: $\frac{1-5}{1-(-1)} = -2$.	1 pont	
Az LM egyenes meredeksége: $\frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$.	1 pont	
Ezek szorzata –1,	1 pont	
tehát az egyenesek merőlegesek (így L-nél valóban derékszög van).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

18. d)		
(A Thalész-tétel, illetve a megfordítása miatt) derékszögű háromszögben a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó fele.	1 pont	
Az átfogó felezőpontja: $F_{KM} = (2;\ 4)$.	1 pont	
$r = \frac{KM}{2} = \frac{\sqrt{6^2+(-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$	1 pont	
A körülírt kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: A KM oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $y = 3x - 2$, *a KL oldalé:* $y = 0{,}5x + 3$, *az LM oldalé:* $y = -2x + 8$.