

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. május 9. 9:00

I.

Időtartam: 45 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 45 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A megoldások sorrendje tetszőleges.
3. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
4. **A feladatok végeredményét az erre a célra szolgáló keretbe írja**, a megoldást csak akkor kell részleteznie, ha erre a feladat szövege utasítást ad!
5. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
6. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén egyértelműen jelölje, hogy melyiket tartja érvényesnek!
7. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

1. Egy akció során az eredetileg 21 000 Ft-os cipő árát 20%-kal csökkentették. Mennyi a cipő csökkentett ára?

A csökkentett ár:	Ft.	2 pont	
-------------------	-----	--------	--

2. Hány éle van egy hétpontú teljes gráfnak?

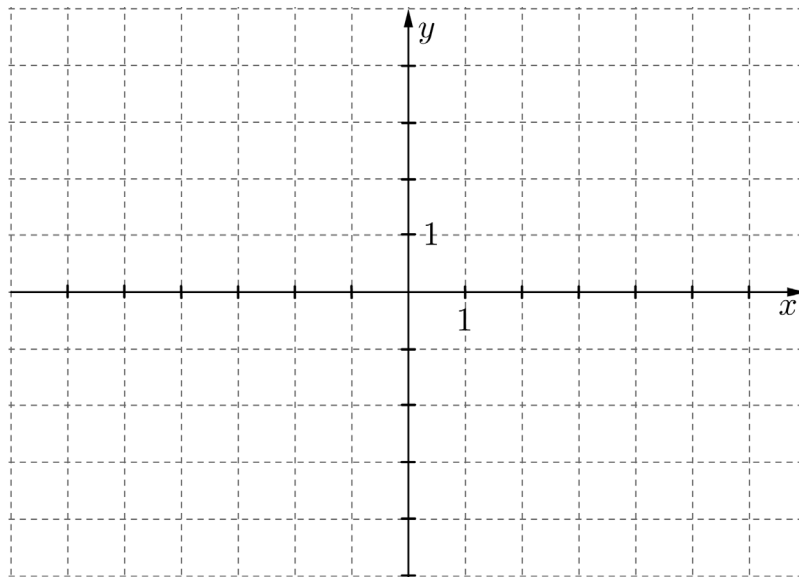
	2 pont	
--	--------	--

3. Az alaphalmaz legyen az egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Az alaphalmaz részhalmazai közül az A halmaz legyen a prímszámok halmaza, a B halmaz pedig legyen a 3-mal osztható számok halmaza.

Elemei felsorolásával adja meg a \bar{B} és az $A \setminus B$ halmazt!

$\bar{B} =$	1 pont	
$A \setminus B =$	2 pont	

4. Ábrázolja a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto \sqrt{x} - 1$ függvényt!



2 pont	
--------	--

5. Adja meg a 420 és az 504 legnagyobb közös osztóját! Megoldását részletezze!

	2 pont	
A legnagyobb közös osztó:	1 pont	

6. Adott az $A(2; 4)$ és a $B(3; -1)$ pont a koordináta-rendszerben. Írja fel az \overrightarrow{AB} vektort a koordinátáival!

$\overrightarrow{AB}(\quad ; \quad)$	2 pont	
--------------------------------------	--------	--

7. Egy mértani sorozat második tagja 6, harmadik tagja 9. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az összegét! Megoldását részletezze!

	3 pont	
$S_6 =$	1 pont	

8. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek számjegyei különböző páratlan számok?

	2 pont	
--	--------	--

9. Tekintsük a következő állítást: *Minden út Rómába vezet.*
Az alábbi állítások közül válassza ki azokat, amelyek tagadásai ennek az állításnak!

- A: Nincs olyan út, ami Rómába vezet.
B: Van olyan út, amelyik nem Rómába vezet.
C: Semelyik út nem vezet Rómába.
D: Nem minden út vezet Rómába.

	2 pont	
--	--------	--

10. Adott a $2x + 5y = 19$ egyenletű f egyenes. Adja meg az f egyenes és az $y = 5$ egyenletű egyenes metszéspontjának koordinátáit!

A metszéspont: (;)	2 pont	
----------------------	--------	--

11. Számítsa ki az 1989 cm^3 térfogatú gömb sugarának hosszát!

	2 pont	
--	--------	--

12. Egy kék és egy piros szabályos dobókockával dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a kék kockával nagyobb számot dobunk, mint a pirossal? Válaszát indokolja!

	3 pont	
	1 pont	

		pontszám	
		maximális	elért
I. rész	1. feladat	2	
	2. feladat	2	
	3. feladat	3	
	4. feladat	2	
	5. feladat	3	
	6. feladat	2	
	7. feladat	4	
	8. feladat	2	
	9. feladat	2	
	10. feladat	2	
	11. feladat	2	
	12. feladat	4	
ÖSSZESEN		30	

dátum

javító tanár

	pontszáma egész számra kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző

Megjegyzések:

1. Ha a vizsgázó a II. írásbeli összetevő megoldását elkezdte, akkor ez a táblázat és az aláírási rész üresen marad!
2. Ha a vizsga az I. összetevő teljesítése közben megszakad, illetve nem folytatódik a II. összetevővel, akkor ez a táblázat és az aláírási rész kitöltendő!

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. május 9. 9:00

II.

Időtartam: 135 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 135 percet fordíthat, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A **B** részben kitűzött három feladat közül csak kettőt kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.



4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban felkelhető táblázatok helyettesítése (\sin , \cos , tg , \log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek bizonyos statisztikai mutatók kiszámítására (átlag, szórás) abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, *de alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell.*
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

A

13. Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény: $x \mapsto (x+3)^2 - 2,25$.

- a) Mit rendel az f függvény az $x = 1$ -hez?
- b) Adja meg az f függvény zérushelyeit!
- c) Az alábbi mondatban húzza alá a megfelelő szót (maximuma vagy minimuma), és egészítse ki a mondatot a pontozott helyeken a hiányzó számokkal úgy, hogy igaz állítást kapjon!

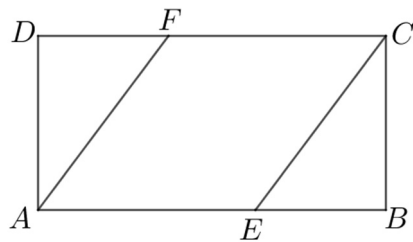
Az f függvénynek az $x = \dots\dots$ helyen maximuma
minimuma van, melynek értéke $\dots\dots$.

- d) Adja meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

Az f függvény értékkészlete a valós számok halmaza.

a)	2 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
d)	2 pont	
Ö.:	11 pont	

- 14.** Az $ABCD$ téglalap AB oldalának hossza 12 cm, a BC oldal hossza 6 cm. A téglalapba az $AECF$ rombuszt írjuk az ábrán látható módon (E az AB oldal, F a CD oldal egy pontja).



- Igazolja, hogy a rombusz oldalainak hossza 7,5 cm!
- Számítsa ki a rombusz belső szögeinek nagyságát!
- Hány százaléka a rombusz területe a téglalap területének?

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	13 pont	

15. Az ENSZ felmérése szerint a Föld népessége 8 milliárd fő volt 2022 végén.¹ A Földön a népességnövekedés mértéke jelenleg körülbelül évi 1%.

- a) Hány fő élne 2100 végén a Földön, ha addig folyamatosan évi 1% lenne a népességnövekedés?
- b) Melyik évben érne el a 12 milliárd főt a Föld népessége évi 1%-os növekedés mellett?

Az ENSZ becslése szerint 2100 végére 10,35 milliárd fő lesz a Föld népessége.

- c) 2022 végétől kezdve évente hány százalékkal kellene növekednie a népességnek ennek eléréséhez, ha minden évben ugyanannyi százalékkal nőne a népesség?

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	12 pont	

¹ forrás: https://www.ksh.hu/interaktiv/grafikonok/vilag_nepessege.html (utolsó letöltés dátuma: 2023.01.31.)

B

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

16. A középszintű matematika érettségi vizsgán minden vizsgázó pontosan két feladatot választ a 16-17-18. feladatok közül. Az egyik 24 fős érettségiző csoportban a vizsgázók 75%-a választotta a 16-os, 62,5%-a pedig a 17-es feladatot.

a) A csoportban a vizsgázók hány százaléka választotta a 18-as feladatot?

A csoportban az alábbi osztályzatok születtek a matematika középszintű vizsgán.

Osztályzat	1	2	3	4	5
Darabszám	0	2	9	6	7

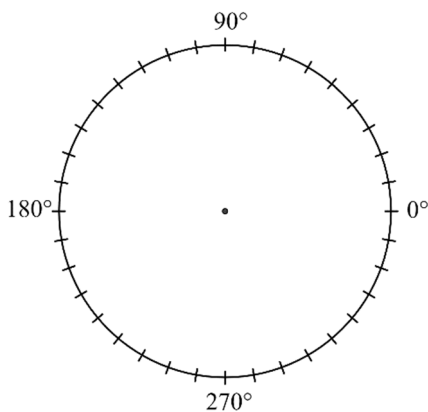
b) Számítsa ki az osztályzatok átlagát ebben a csoportban!

c) Adja meg az osztályzatok móduszát, mediánját és terjedelmét ebben a csoportban!

d) Ábrázolja kördiagramon az osztályzatok eloszlását ebben a csoportban!

Az érettségi elnök a javítások átnézése céljából a fenti 24 matematikadolgozat közül kiválaszt nyolcat úgy, hogy 2-esből, 3-asból, 4-esből és 5-ösből is pontosan kettő szerepeljen a kiválasztottak között.

e) Hányféleképpen választhat ki ilyen módon nyolc dolgozatot?



a)	4 pont	
b)	2 pont	
c)	3 pont	
d)	4 pont	
e)	4 pont	
Ö.:	17 pont	

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

17. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 24 cm, a többi oldala 12 cm hosszú.

a) Igazolja, hogy a trapéz A csúcsánál lévő belső szög 60° -os!

b) Számítsa ki a BD átló hosszát!

A trapézt megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.

c) Számítsa ki a keletkező forgástest térfogatát!

Egy trapéz alakú területre szőlőt telepítettek, az első sorba 120 szőlőtőkét, az utolsóba 240-et. A második sortól kezdve minden sorba ugyanannyival több szőlőtőke került, mint az előzőbe. Összesen 7380 darab szőlőtőkét ültettek el.

d) Az első 20 sorba kizárólag olaszrizlingtőke került, és máshova ebből a fajtából nem ültettek. Számítsa ki a telepített olaszrizlingtőkék számát!

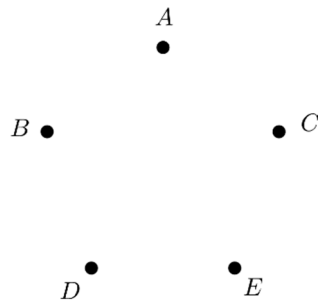
a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	7 pont	
Ö.:	17 pont	

**A 16-18. feladatok közül tetszése szerint választott kettőt kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon lévő üres négyzetbe!**

- 18.** A vázlatos ábra egy szántóföld felosztását mutatja az öt tulajdonos között. Szeretnénk elkészíteni a szántóföldhöz tartozó *szomszédsági gráfot*, amelyben két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha a két csúcs által jelölt földterület szomszédos. (Két földterület szomszédos, ha van közös határolószakasza.)

A	
B	C
D	E

- a) Rajzolja fel ehhez a szántóföldhöz a szomszédsági gráfot!



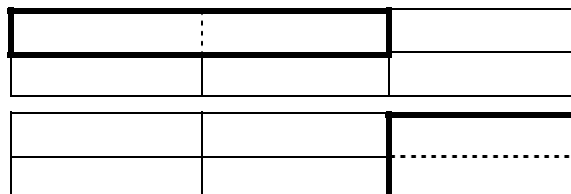
A *négyszögöl* a mai napig használt (nem hivatalos) mértékegység a telkek, szántóföldek területének mérésére. 1 négyszögöl egyenlő az 1 *öl* oldalhosszúságú négyzet területével. Tudjuk, hogy egy hektár ($10\,000\text{ m}^2$) kb. 2780 négyszögöl.

- b) Számítsa ki, hogy egy *öl* hány méter!

Egy falu vezetése úgy dönt, hogy a falu határában egy sík területet felparcelláznak 12 egyforma telekre, és ezen a területen a faluban letelepülő fiatal családoknak jelképes, 1 Ft-os áron adnak el 1-1 telket. Az akcióra végül 14 család jelentkezik (köztük a Kovács és a Szabó család), ezért a 14 család közül sorsolják ki a 12 nyertest.

- c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a Kovács és a Szabó család is a nyertesek között lesz!

Az alábbi ábra vázlatosan mutatja a 12 egybevágó, téglalap alakú telek elhelyezkedését. Végül a nyertesek közé bekerült két, egymással jó viszonyban lévő család, akik úgy döntöttek, hogy két szomszédos telket vesznek meg, és a két telek köré úgy építenek kerítést, hogy a két telket nem választják el egymástól kerítéssel. Tudjuk, hogy ha a két szomszédos telek a rövidebb oldalával csatlakozik egymáshoz, akkor 228 méter kerítésre, ha a hosszabb oldallal csatlakozik egymáshoz, akkor 156 méter kerítésre lesz szükségük összesen. (Az ábrán vastag vonallal jelöltük a kerítést a két esetben.)



- d) Mekkora egy telek területe?

a)	2 pont	
b)	3 pont	
c)	5 pont	
d)	7 pont	
Ö.:	17 pont	

	a feladat sorszám	pontszám		
		maximális	elért	összesen
II. A rész	13.	11		
	14.	13		
	15.	12		
II. B rész		17		
		17		
		← nem választott feladat		
	ÖSSZESEN	70		

	pontszám	
	maximális	elért
I. rész	30	
II. rész	70	
Az írásbeli vizsgarész pontszáma	100	

dátum

javító tanár

	pontszáma egész számra kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum

dátum

javító tanár

jegyző